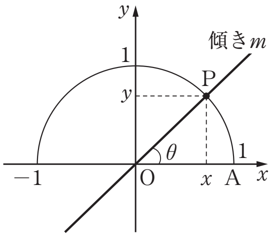
第7講　三角比(2)

【基礎確認事項】

［1］　正接の値と直線の傾き

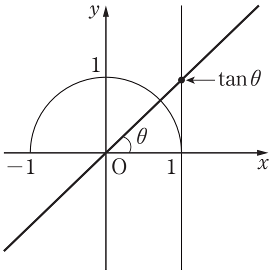


□右図のように，原点を通る傾き m の直線と単位円との交点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とし，$\angle\mathrm{AOP}=\theta$（$\theta\neq 90^\circ$）とする．

傾き $m=\dfrac{y}{x}$ および $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ より

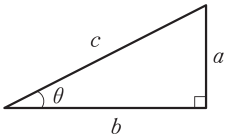
> 直線 $y=mx$ と x 軸の正方向とのなす角 θ について
> $\tan\theta=m$

が成り立つ．m は傾きであり，x 座標が1増加したとき y は m 増加することより，$\tan\theta$ の値は直線 $y=mx$ と直線 $x=1$ との交点の y 座標に一致する．



⇒　C&U 1 2

［2］　三角比の相互関係



□右の直角三角形において，

$$\sin\theta=\frac{a}{c}\ \text{より}\quad a=c\sin\theta\qquad \cos\theta=\frac{b}{c}\ \text{より}\quad b=c\cos\theta$$

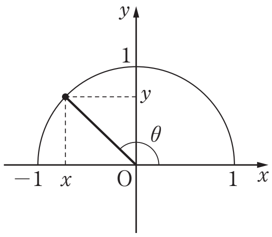
である．

ここで，三平方の定理より　$a^2+b^2=c^2$　であるので

$$(c\sin\theta)^2+(c\cos\theta)^2=c^2\quad \text{つまり}\quad c^2(\sin\theta)^2+c^2(\cos\theta)^2=c^2$$

よって　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$　である．

また，$\tan\theta=\dfrac{a}{b}=\dfrac{c\sin\theta}{c\cos\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　である．



□同様に，右の単位円において

$x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$ であり，三平方の定理より

$x^2+y^2=1^2$　であるから　$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$　である．

また，$\tan\theta=\dfrac{y}{x}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　である．

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ の両辺を $\cos^2\theta$ で割ることにより

$\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+1=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$　　つまり　$\tan^2\theta+1=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$　が成り立つ．

以上より，次の三角比の相互関係が成り立つ．

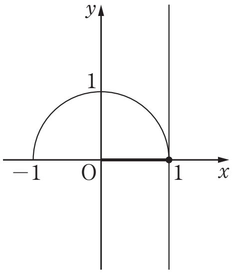
> $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$　　　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　　　$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

⇒　C&U 3

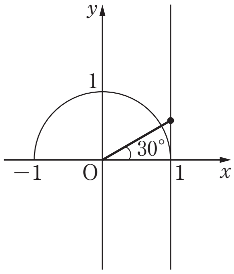
【CHECK & UP】

1　図を参考にして，θ が次の角度のときの $\tan\theta$ があればその値を求めよ．

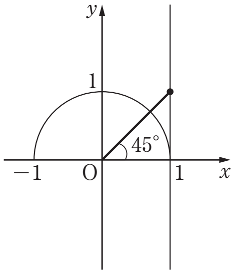
(1)　0°



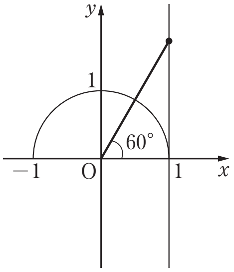
(2)　30°



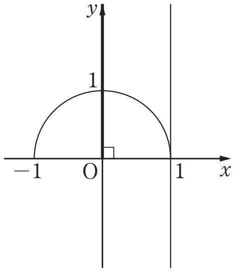
(3)　45°



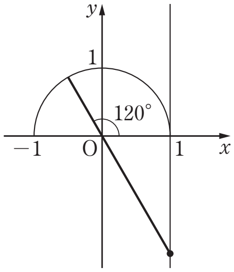
(4)　60°



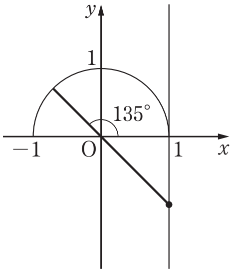
(5)　90°



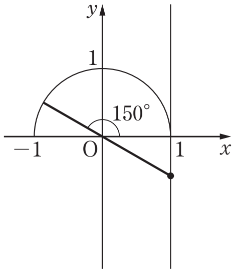
(6)　120°



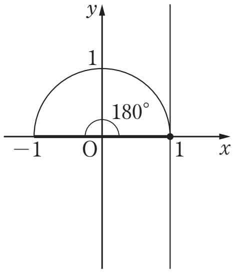
(7)　135°



(8)　150°



(9)　180°



2　直線 $y=\sqrt{3}x+1$ と x 軸の正の方向とのなす角 θ $(0°\leqq\theta\leqq180°)$ を求めよ．

3　(1)　$\sin\theta=\dfrac{3}{5}$ を満たす鈍角 θ について，$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ．

(2)　$0°\leqq\theta\leqq180°$ とする．$\tan\theta=-2$ のとき，$\cos\theta$ と $\sin\theta$ の値を求めよ．

＜ Note ＞

第7講　三角比(2)

1 [1]　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．t が次の値をとるとき，$\tan\theta = t$ を満たす θ の値を求めよ．

(1)　$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　(2)　$t=1$　(3)　$t=\sqrt{3}$　(4)　$t=-\sqrt{3}$

(5)　$t=-1$　(6)　$t=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　(7)　$t=0$

[2]　2 直線 $y=x-1$ と $y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x+2$ のなす鋭角を求めよ．

< Note >

2　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする.

(1)　$\sin\theta = \dfrac{12}{13}$ のとき $\cos\theta$, $\tan\theta$ の値を求めよ.

(2)　$\tan\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき $\sin\theta$, $\cos\theta$ の値を求めよ.

< Note >

3　$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　$(0°\leqq\theta\leqq180°)$ のとき，次の式の値を求めよ．

(1)　$\sin\theta\cos\theta$　　　(2)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta$

(3)　$\sin\theta-\cos\theta$　　　(4)　$\sin\theta$，$\cos\theta$

＜ Note ＞

第７講　三角比(2)

(1)　2 直線 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x+1$ と $y=-x-3$ のなす鋭角は $\boxed{アイ}$° である.

(2)　$0°\leqq\theta\leqq180°$ とする．$\tan\theta=-\dfrac{1}{3}$ のとき $\sin\theta=\dfrac{\boxed{ウ}}{\sqrt{\boxed{エオ}}}$,

$\cos\theta=-\dfrac{\boxed{カ}}{\sqrt{\boxed{キク}}}$ である.

＜ Note ＞

第７講　三角比(2)

【CHECK & UP】

1

(1) $\tan 0^\circ = 0$　(2) $\tan 30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(3) $\tan 45^\circ = 1$　(4) $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

(5) $\tan 90^\circ$ はない　(6) $\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$

(7) $\tan 135^\circ = -1$　(8) $\tan 150^\circ = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(9) $\tan 180^\circ = 0$

> 同じく「有名角」の正接の値の問題．やはり最初は直角三角形をイメージする必要があるかもしれないが，徐々に角度とその三角比の値をダイレクトでつなげられるようにしたい．特に tan は原点を通る直線と直線 $x=1$ との交点を意識すること．角度の変化により高さが無限に上下するイメージとなる．

2

2直線 $y=\sqrt{3}x+1$ と $y=\sqrt{3}x$ は，x 軸の正の方向とのなす角が等しい．

よって $\tan\theta=\sqrt{3}$　より　$\boldsymbol{\theta=60^\circ}$

> 2直線 $y=mx+n$ と $y=mx$ は傾きが等しく m であるため「平行」である．よって平行線と角の性質により x 軸の正の方向とのなす角が等しい．

3

(1) $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$ より $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{16}{25}$

θ が鈍角より $\cos\theta<0$ であるから　$\cos\theta=-\dfrac{4}{5}$

このとき　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=-\dfrac{3}{4}$

> $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ の公式は
> 　$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$　や
> 　$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$　の形で
> 用いられることが多い．
> 　θ が鋭角ならば $\cos\theta$，$\tan\theta$ は正
> 　θ が鈍角ならば $\cos\theta$，$\tan\theta$ は負
> である．角が鋭角か鈍角かが不明なときは「場合分け」が必要となる．
> $\sin\theta$ は鋭角・鈍角に関わらず正である．

(2) $0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ において $\tan\theta=-2$ より θ は鈍角である．

$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=5$　　$\cos^2\theta=\dfrac{1}{5}$

$\cos\theta<0$ より　$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より　$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=-2\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

> $0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ においては
> 　$\cos\theta$，$\tan\theta$ が正ならば θ は鋭角
> 　$\cos\theta$，$\tan\theta$ が負ならば θ は鈍角
> である．問題文に明確に「鋭角」，「鈍角」に関する表記がなくとも上記のことに留意して各三角比の符号を決定すること．

第7講　三角比(2)

1 [1]　$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする．t が次の値をとるとき，$\tan\theta = t$ を満たす θ の値を求めよ．

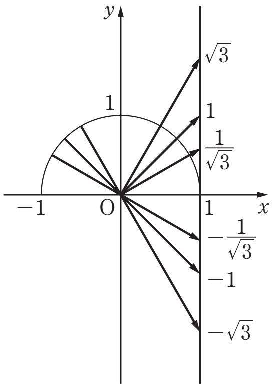
(1)　$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　(2)　$t=1$　(3)　$t=\sqrt{3}$　(4)　$t=-\sqrt{3}$

(5)　$t=-1$　(6)　$t=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　(7)　$t=0$

(1)　$\boldsymbol{\theta=30°}$　(2)　$\boldsymbol{\theta=45°}$　(3)　$\boldsymbol{\theta=60°}$

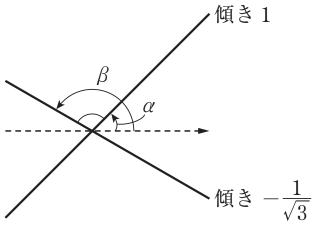
(4)　$\boldsymbol{\theta=120°}$　(5)　$\boldsymbol{\theta=135°}$　(6)　$\boldsymbol{\theta=150°}$

(7)　$\boldsymbol{\theta=0°,\ 180°}$



1 [2]　2直線 $y=x-1$ と $y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x+2$ のなす鋭角を求めよ．

2直線 $y=x-1$，$y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x+2$ と x 軸の正の方向とのなす角をそれぞれ α，β とする．



$\tan\alpha=1$ より　$\alpha=45°$

$\tan\beta=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より　$\beta=150°$

$\beta-\alpha=105°$　より求める鋭角は **75°**

2　$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする．

(1)　$\sin\theta=\dfrac{12}{13}$ のとき $\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ．

(2)　$\tan\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき $\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ．

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき

(1)　$\sin\theta=\dfrac{12}{13}$ より　$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\dfrac{12}{13}\right)^2=\dfrac{25}{169}$

$0°<\theta<90°$ のとき　$\cos\theta>0$ より　$\cos\theta=\boldsymbol{\dfrac{5}{13}}$　　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}}=\boldsymbol{\dfrac{12}{5}}$

$90^\circ<\theta<180^\circ$ のとき　$\cos\theta<0$ より　$\cos\theta=-\mathbf{\dfrac{5}{13}}$　　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}}=-\mathbf{\dfrac{12}{5}}$

(2)　$\tan\theta=\dfrac{1}{2}$ より　$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}$

$\tan\theta>0$ より θ は鋭角であるので　$\cos\theta>0$

よって　$\cos\theta=\mathbf{\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$　　$\sin\theta=\tan\theta\cdot\cos\theta=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\mathbf{\dfrac{1}{\sqrt{5}}}$

3　$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　$(0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ)$ のとき，次の式の値を求めよ．

(1)　$\sin\theta\cos\theta$　　(2)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta$

(3)　$\sin\theta-\cos\theta$　　(4)　$\sin\theta,\ \cos\theta$

---

(1)　$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の両辺を２乗して

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\frac{1}{2}$$

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{2}$$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}$　　$2\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$　　よって　$\sin\theta\cos\theta=-\mathbf{\dfrac{1}{4}}$

(2)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{4}\right)\right\}=\mathbf{\dfrac{5\sqrt{2}}{8}}$

(3)　(1)より　$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{4}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より　$\sin\theta\geqq0$　　よって　$\cos\theta<0$

$$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1-2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{2}$$

$\sin\theta-\cos\theta>0$ より　$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\mathbf{\dfrac{\sqrt{6}}{2}}$

(4)　$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　……①　　$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　……②

①＋②より　$2\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$　　よって　$\mathbf{\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$

①－②より　$2\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$　　よって　$\mathbf{\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$

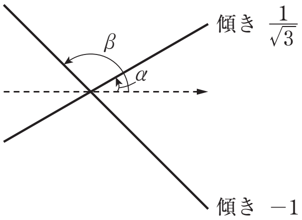
第7講　三角比(2)

(1)　2直線 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x+1$ と $y=-x-3$ のなす鋭角は $\boxed{\text{アイ}}$°である.

(2)　$0°\leqq\theta\leqq180°$ とする. $\tan\theta=-\dfrac{1}{3}$ のとき $\sin\theta=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\sqrt{\boxed{\text{エオ}}}}$,

$\cos\theta=-\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\sqrt{\boxed{\text{キク}}}}$ である.

(1)　2直線 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x+1$, $y=-x-3$ が x 軸の正の方向となす角をそれぞれ α, β とすると,



$\tan\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より　$\alpha=30°$,

$\tan\beta=-1$ より　$\beta=135°$

$\beta-\alpha=105°$　よって　求める鋭角は　**75°**

(2)　$\tan\theta=-\dfrac{1}{3}$ より

$$\frac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+\frac{1}{9}=\frac{10}{9}$$

$$\cos^2\theta=\frac{9}{10}$$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ において $\tan\theta<0$ より, θ は鈍角.

よって　$\cos\theta=-\mathbf{\dfrac{3}{\sqrt{10}}}$

このとき　$\sin\theta=\tan\theta\times\cos\theta=\left(-\dfrac{1}{3}\right)\cdot\left(-\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)=\mathbf{\dfrac{1}{\sqrt{10}}}$